

Chương 3: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

SỰ ĐỒNG PHẪNG CỦA CÁC VECTƠ

A. GIÁO KHOA

1) Định nghĩa

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B.

Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}; \dots$

2) Các quy tắc về vectơ

Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ hoặc: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.

Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành ABCD ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Quy tắc trung điểm: Nếu M là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Quy tắc trung tuyến: Nếu AP là trung tuyến của tam giác ABC thì:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Tương tự hình bên ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CM} \end{cases}$$

Quy tắc trọng tâm: Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Khi đó với mọi điểm M ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' thì:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$

Chứng minh:

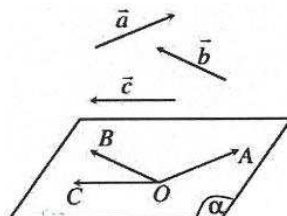
Ta có: ACC'A' là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$.

Tương tự: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ suy ra $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

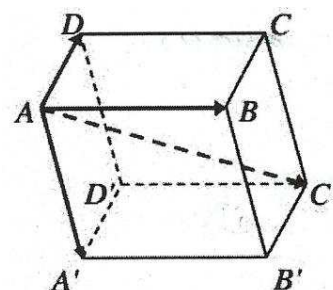
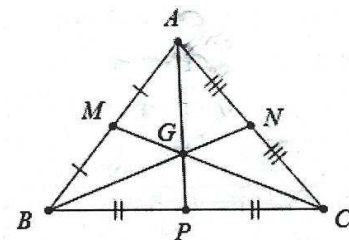
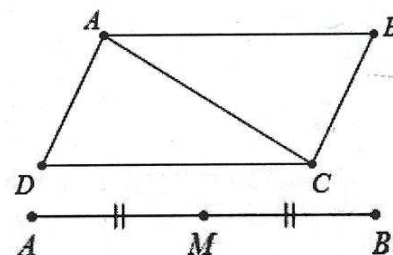
Chú ý: Nếu G là trọng tâm tứ diện ABCD, ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

3) Sự đồng phẳng của các vectơ, điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

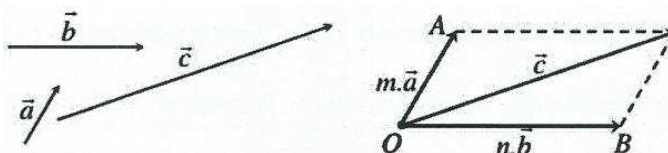
a) Định nghĩa: Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.



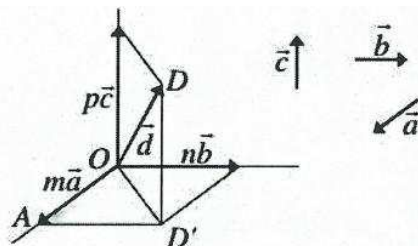
b) Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:



Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng là hoặc $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hoặc tồn tại các số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.



Định lý 2: Nếu $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ là ba vector không đồng phẳng thì với mỗi vector $\vec{d}$ trong không gian, ta tìm được các số m, n, p duy nhất sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.



B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

- Hãy biểu diễn vec tơ $\vec{IJ}$ theo 3 vector $\vec{AB}; \vec{AC}$ và $\vec{AD}$.
- Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Hãy biểu diễn vec tơ $\vec{AG}$ theo 3 vec tơ $\vec{AB}; \vec{AC}$ và $\vec{AD}$.

Lời giải:

a) Ta có: $\vec{IJ} = (\vec{IA} + \vec{AJ})$, mặt khác $\vec{IA} = -\vec{AI} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$.

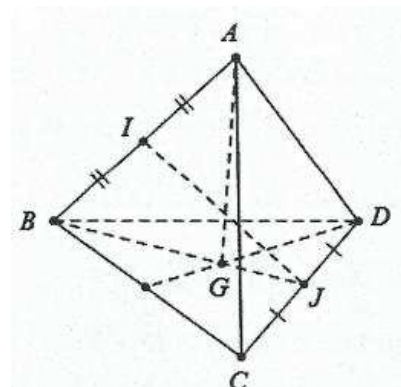
$$\vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD}) \text{ (tính chất trung điểm)}$$

$$\text{Do đó: } \vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}.$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} \vec{AB} = \vec{AG} + \vec{GB} \\ \vec{AC} = \vec{AG} + \vec{GC} \\ \vec{AD} = \vec{AG} + \vec{GD} \end{cases} \text{ cộng theo vế ta được:}$$

$$3\vec{AG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$$

$$\text{Mặt khác } \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \text{ (do } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC\text{)}. \text{ Do vậy } \vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}}{3}.$$



Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\vec{AA'} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}$.

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BB' và $A'C'$, điểm K thuộc $B'C'$ sao cho $\vec{KC'} = -2\vec{KB'}$.

- Hãy biểu thị vecto $\vec{B'C}; \vec{CI}$ và $\vec{BJ}$ qua 3 vecto $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$.
- Biểu thị vecto $\vec{AK}$ theo vecto $\vec{AI}$ và $\vec{AJ}$ từ đó suy ra 3 vecto $\vec{AK}; \vec{AI}$ và $\vec{AJ}$ đồng phẳng.

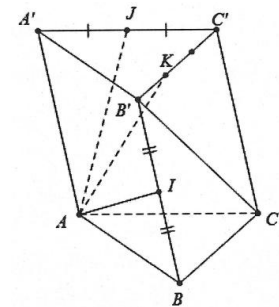
Lời giải:

a) Ta có: $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{B'B}$ (theo quy tắc hình bình hành).

Suy ra $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = \vec{c} - \vec{b} - \vec{a}$

Lại có: $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

Mặt khác: $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'J} = -\overrightarrow{AB} + \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'} = -\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$



b) Ta có: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K}$ (1)

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JC'} + \overrightarrow{C'K}$ (2). Lấy 2.(1)+(2) ta được: $3\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{JC'} + \underbrace{2\overrightarrow{B'K} + \overrightarrow{C'K}}_{\vec{0}}$

$= 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{A'J} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AJ}$.

Vậy $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ})$ nên $\overrightarrow{AK}; \overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$ đồng phẳng.